Алгоритмы интерпретации сейсмических данных

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Выпуск 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ЗЕМЛИ им. О. Ю. ШМИДТА

Алгоритмы интерпретации сейсмических данных

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ
Выпуск 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1971

лежит на краю доверительной области ошибок для наиболее вероятного инструментального эпицентра. Отмеченное обстоятельство требует специального исследования.

Дальнейший статистический анализ экспериментальных значений времен пробега от очагов определенного района до отдельных сейсмических станций позволит выявить оптимальную систему сейсмических наблюдений для наиболее точной локализации параметров очагов.

Литература

1. Атлас землетрясений СССР. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. *Н. А. Введенская*. О точности определения положения очага методом засечек.— Труды Геофиз. ин-та АН СССР, 1955, № 30.
3. *Н. В. Кондорская и др*. Некоторые результаты применения электронной вычислительной машины при обобщении сейсмических наблюдений.— Вычислит. сейсм., 1966, вып. 1.
4. *В. Г. Папалашвили*. Об оценке точности определения положения эпицентров и очагов кавказских землетрясений при помощи метода засечек.— Труды Ин-та геофизики АН ГрузССР, 1956, 15.
5. *Ю. В. Ризниченко и др*. Методы детального изучения сейсмичности.— Труды Ин-та физики Земли, 1960, № 9 (176).
6. *E. Flinn*. Confidence regions and error determination for seismic event location.— Revs Geophys., 1965, 3, N 1.
7. *E. Herrin*. Application of Monte Carlo techniques to the study of errors in epicenter locations.— Dallas Seismol. Obs., 1964.
8. *Jeffreys H., Bullen K*. Times of transmission of earthquake waves.— Publ. Bur. Central Scient., 1936, fasc. 14.

А. Л. Левшин, З. А. Янсон

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЕРТИКАЛЬНО И РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы для детального изучения свойств Земли и источников возмущений (например, для выявления слоев пониженной скорости, зон больших градиентов скорости, оценки распределения поглощения по глубине, определения механизма и временнóй функции источника и т. п.) широко используются данные поверхностных волн землетрясений и взрывов. При решении таких сравнительно сложных задач математический аппарат, развитый применительно к упрощенным моделям среды (слоисто-однородные среды) и источника (точечные источники) [5, 12, 16—20], может оказаться недостаточным. В настоящей работе, основанной на результатах, полученных в [2, 4, 15], изложены основные элементы более общей теории поверхностных волн, справедливой при минимальных ограничениях на тип модели и источника.

Мы рассматриваем вертикально (радиально) неоднородные среды с произвольными законами изменения упругих констант и плотности с глубиной (радиусом); для отыскания решений уравнений движения в такой среде используется аппарат спектральной теории операторов [6, 9]. Сейсмический источник мы трактуем как локализованное во времени и пространстве поле объемных сил; ограничения, наложенные на свойства этого поля, физически несущественны. Построив точное решение для такого источника, мы используем асимптотику для больших расстояний от него и выделяем в полном возмущении бегущие поверхностные волны Рэлея и Лява. Затем полученные таким путем формулы конкретизируем для ряда элементарных воздействий [1].

1. ПОЛЕ СМЕЩЕНИЙ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Постановка задачи. Рассмотрим упругое полупространство с координатами z, r, φ $(0 \leqslant z < \infty,\ 0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

[1] В работе Сайто [22], некоторые результаты которой мы здесь используем, намечен во многом близкий нашему подход к поставленной задаче. Однако в [22] дана иная трактовка сейсмического источника и не получены асимптотические формулы для смещений в поверхностных волнах.

Уравнения движения имеют вид [7]:

$$\frac{\partial \widehat{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{zz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - F_z,$$

$$\frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rr} - \widehat{\varphi\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - F_r, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \widehat{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widehat{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\widehat{r\varphi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} - F_\varphi.$$

Здесь $\widehat{rz}$, $\widehat{rr}$, $\widehat{r\varphi}$, $\widehat{\varphi z}$, $\widehat{\varphi\varphi}$, $\widehat{zz}$ — компоненты тензора напряжений; u_z, u_r, u_φ — компоненты вектора смещений $\mathbf{u}(t, z, r, \varphi)$ по ортам $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\varphi$ соответственно; F_z, F_r, F_φ — компоненты вектора объемных сил $\mathbf{F}(t, z, r, \varphi)$, действующих в источнике, по тем же ортам; t — время.

Для компонент напряжений справедливы формулы:

$$\widehat{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \qquad \widehat{\varphi z} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right), \tag{1.2}$$

$$\widehat{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \widehat{\varphi\varphi} = \lambda\Delta + 2\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right),$$

$$\widehat{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right), \qquad \widehat{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Здесь Δ — дилатация,

$$\Delta = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}. \tag{1.3}$$

Константы Ламэ λ и μ и плотность ρ — кусочно-непрерывные положительные функции одной координаты z; при $z > Z$ λ, μ, ρ постоянны, а скорость поперечных волн $b = \sqrt{\mu/\rho}$ и скорость продольных волн $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ максимальны:

$$b(Z + 0) = \max b(z), \quad a(Z + 0) = \max a(z)^1.$$

Компоненты смещений и напряжений непрерывны и ограничены на всем отрезке $0 \leqslant z < \infty$, поверхность $z = 0$ свободна от напряжений, т. е.

$$\widehat{rz} = \widehat{\varphi z} = \widehat{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{1.4}$$

[1] Это ограничение несущественно, так как Z может быть как угодно большим.

Начальные условия:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{1.4a}$$

Источник. Поле сил $\mathbf{F}(t, z, r, \varphi)$ описывает действие локализованного во времени и пространстве источника. На $\mathbf{F}$ наложены следующие физически несущественные ограничения:

1) $\mathbf{F}(t, z, r, \varphi) = 0$ при $t < 0$;

2) $\mathbf{F}(t, z, r, \varphi)$ абсолютно интегрируема и подчиняется условиям Дирихле относительно всех аргументов. Тогда допустимо следующее представление:

$$\mathbf{F}(t, z, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt} \int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{3} f_m^{(i)} \mathbf{A}_m^{(i)}\right] \xi\, d\xi\, dp, \tag{1.5}$$

где

$$\mathbf{A}_m^{(1)} = \mathbf{a}_z Y_m, \qquad \mathbf{A}_m^{(2)} = \mathbf{a}_r \frac{\partial Y_m}{\partial r}\frac{1}{\xi} + \mathbf{a}_\varphi \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi}\frac{1}{\xi r}, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{A}_m^{(3)} = \mathbf{a}_r \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi}\frac{1}{\xi r} - \mathbf{a}_\varphi \frac{\partial Y_m}{\partial r}\frac{1}{\xi}, \qquad Y_m = e^{im\varphi} J_m(\xi r).$$

Здесь J_m — функция Бесселя первого рода целого значка m. Система векторных функций $\mathbf{A}_m^{(i)}$ является полной и попарно ортогональной. Коэффициенты $f_m^{(i)}(z, \xi, p)$ находятся из соотношений ортогональности

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} [\mathbf{A}_m^{(i)}(\lambda r), \overline{\mathbf{A}}_l^{(j)}(\gamma r)]\, r\, d\varphi\, dr = 2\pi \delta_{ij} \delta_{ml} \frac{\delta(\gamma - \lambda)}{\sqrt{\gamma\lambda}}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta(\gamma - \lambda)$ — функция Дирака[1]) и равны

$$f_m^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\mathbf{F}, \overline{\mathbf{A}}_m^{(i)})\, r\, d\varphi\, dr\, dt.$$

Конкретно для $i = 1,2,3$ имеем:

$$f_m^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [F_z \overline{Y}_m(\xi r)]\, r\, d\varphi\, dr\, dt,$$

$$f_m^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\left(F_r \frac{\partial \overline{Y}_m}{\partial r} + F_\varphi \frac{\partial \overline{Y}_m}{\partial \varphi}\frac{1}{r}\right)\right] \frac{r}{\xi}\, d\varphi\, dr\, dt, \tag{1.7}$$

$$f_m^{(3)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\left(F_r \frac{\partial \overline{Y}_m}{\partial \varphi}\frac{1}{r} - F_\varphi \frac{\partial \overline{Y}_m}{\partial r}\right)\right] \frac{r}{\xi}\, d\varphi\, dr\, dt,$$

$$\overline{Y}_m = e^{-im\varphi} J_m(\xi r).$$

[1] $\overline{\mathbf{A}}_l^{(j)}$ — комплексно-сопряженное с $\mathbf{A}_l^{(j)}$.

Для компонент сил F_z, F_r, F_φ получим из (1.5), (1.6):

$$F_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m^{(1)} Y_m\right]\xi\, d\xi\, dp,$$

$$F_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_m^{(2)}\frac{\partial Y_m}{\partial r} + f_m^{(3)}\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\right)\right] d\xi dp, \quad (1.8)$$

$$F_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(f_m^{(2)}\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\frac{1}{r} - f_m^{(3)}\frac{\partial Y_m}{\partial r}\right)\right] d\xi\, dp.$$

Формулы для смещений. Решение исходной нестационарной задачи теории упругости имеет вид

$$\mathbf{u}(t, z, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\mathbf{U}\, dp, \quad (1.9)$$

где

$$\mathbf{U}(p, z, r, \varphi) = \mathrm{v.}\left[\int_0^\infty \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{3} V_m^{(i)}(z, \xi, p)\, A_m^{(i)}\xi\, d\xi\right]$$

решение аналогичной стационарной задачи теории упругости, которое строится единственным образом при условии, что $V_m^{(i)}(z, \xi, p)$ интегрируемы с квадратом на интервале $z \in (0, \infty)$. Здесь и далее v. означает, что контур интегрирования идет вдоль действительной оси с обходом полюсов подинтегральной функции по малым полуокружностям сверху (при интегрировании по ξ) или снизу (при интегрировании по p). Отсюда для проекций смещения на орты $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\varphi$ получим:

$$u_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\,\overline{\mathrm{v}}.\int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^{(1)} Y_m\right]\xi\, d\xi\, dp,$$

$$u_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\,\overline{\mathrm{v}}.\int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(V_m^{(2)}\frac{\partial Y_m}{\partial r} + \frac{V_m^{(3)}}{r}\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\right)\right] d\xi\, dp, \quad (1.10)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\,\overline{\mathrm{v}}.\int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{V_m^{(2)}}{r}\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi} - V_m^{(3)}\frac{\partial Y_m}{\partial r}\right)\right] d\xi dp.$$

Подставляя (1.8), (1.10) в уравнения (1.1) и граничные условия (1.4) и считая допустимым двойное дифференцирование под знаком интегралов, получаем следующие уравнения:

1. Для $V_m^{(1)}, V_m^{(2)}$:

$$l_1(V_m^{(1)}, V_m^{(2)}) \equiv \frac{d}{dz}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{dV_m^{(1)}}{dz} - \xi\lambda V_m^{(2)}\right] - \xi\mu\frac{dV_m^{(2)}}{dz} + V_m^{(1)}(p^2\rho - \xi^2\mu) = -f_m^{(1)}, \quad (1.11)$$

$$l_2(V_m^{(1)}, V_m^{(2)}) \equiv \frac{d}{dz}\left[\mu\frac{dV_m^{(2)}}{dz} + \xi\mu V_m^{(1)}\right] + \xi\lambda\frac{dV_m^{(1)}}{dz} + V_m^{(2)}(p^2\rho - \xi^2\lambda - 2\xi^2\mu) = -f_m^{(2)},$$

с граничными условиями

$$\sigma_{zz} \equiv (\lambda + 2\mu)\frac{dV_m^{(1)}}{dz} - \xi\lambda V_m^{(2)} = 0, \qquad \tau_{rz} \equiv \mu\frac{dV_m^{(2)}}{dz} + \xi\mu V_m^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (1.12)$$

Функции $V_m^{(1)}$, $V_m^{(2)}$, σ_{zz} и τ_{rz} непрерывны и ограничены при всех z.

2. Для $V_m^{(3)}$

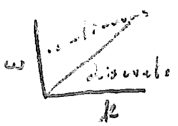
$$l_3(V_m^{(3)}) \equiv \frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dV_m^{(3)}}{dz}\right) + V_m^{(3)}(p^2\rho - \xi^2\mu) = -f_m^{(3)}, \quad (1.13)$$

с граничным условием

$$\tau_{\varphi z} \equiv \mu\frac{dV_m^{(3)}}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (1.14)$$

$V_m^{(3)}$ и $\tau_{\varphi z}$ непрерывны и ограничены для всех z. Левые части уравнений (1.11) и граничные условия (1.12) определяют самосопряженный оператор $\mathbf{L}$ в пространстве интегрируемых с квадратом вектор-функций $\begin{vmatrix} V_m^{(1)} \\ V_m^{(2)} \end{vmatrix}$. Левая часть уравнения (1.13) и граничные условия (1.14) определяют самосопряженный оператор L_3 в пространстве интегрируемых с квадратом функций $V_m^{(3)}$. Если вектор-функции $\begin{vmatrix} f_m^{(1)} \\ f_m^{(2)} \end{vmatrix}$ и функции $f_m^{(3)}$ также интегрируемы с квадратом на интервале $z \in (0, \infty)$ (что следует из ограничений, наложенных на функцию $\mathbf{F}(t, z, r, \varphi)$, то для функций $V_m^{(1)}$, $V_m^{(2)}$, $V_m^{(3)}$ справедливы следующие разложения по собственным функциям выше упомянутых операторов [2, 6, 10].

Представление $V_m^{(i)}$ через собственные функции. $V_m^{(i)} (i = 1,2)$ можно представить следующим образом:



$$V_m^{(i)} = \sum_{k=1}^{k_R(\xi)} c_{km}^R \widetilde{V}_k^{(i)} + \int_{p_0^2}^{\infty} c_m^R (\beta)\, \widetilde{V}^{(i)} (\beta, z)\, d\beta. \qquad (1.15)$$

Здесь для коэффициентов c_{km}^R, c_m^R имеем:

$$c_{km}^R = \frac{1}{p_{kR}^2 (\xi) - p^2} \frac{D_{km}^R}{I_{kR}}, \qquad c_m^R = \frac{D_m^R}{\beta (\xi) - p^2}, \qquad (1.16)$$

$$D_{km}^R = \int_0^\infty (f_m^{(1)} \widetilde{V}_k^{(1)} + f_m^{(2)} \widetilde{V}_k^{(2)})\, dz, \qquad D_m^R = \int_0^\infty (f_m^{(1)} \widetilde{\widetilde{V}}{}^{(1)} + f_m^{(2)} \widetilde{\widetilde{V}}{}^{(2)})\, dz,$$

$$I_{kR} = \int_0^\infty \rho\, [(\widetilde{V}_k^{(1)})^2 + (\widetilde{V}_k^{(2)})^2]\, dz, \qquad p_0^2 = \xi^2 b^2 (Z + 0).$$

Здесь $\widetilde{V}_k^{(1)}$ и $\widetilde{V}_k^{(2)}$, $\widetilde{V}^{(1)}$ и $\widetilde{V}^{(2)}$ — собственные функции оператора, образованного левыми частями (1.11) и граничными условиями (1.12).

Первая пара функций соответствует дискретному спектру собственных значений p_{kR}^2 $(k = 1,2,\ldots\ k_R(\xi))$; $\xi^2 v_R^2 < p_{kR}^2 < p_0^2$, где v_R — минимальная скорость рэлеевской волны в однородном полупространстве с константами, равными $a(z)$, $b(z)$, $\rho (z)$ на некоторой глубине [1,2]). Вторая пара соответствует непрерывному спектру собственных значений $\beta (p_0^2 \leqslant \beta < \infty)$. Волновое число ξ играет здесь роль свободного параметра. Формулы (1.16) получены из соотношений ортогональности:

$$\int_0^\infty \rho\, [\widetilde{V}_i^{(1)} \widetilde{V}_j^{(1)} + \widetilde{V}_i^{(2)} \widetilde{V}_j^{(2)}]\, dz = 0 \qquad \text{при } i \neq j,$$

$$\int_0^\infty \rho\, [\widetilde{V}^{(1)} (\beta) \widetilde{\widetilde{V}} (p^2) + \widetilde{V}^2 (\beta)\, \widetilde{V}^{(2)} (p^2)]\, dz = \delta (p^2 - \beta),$$

где $\widetilde{\widetilde{V}}{}^{(i)}$ комплексно сопряжено с $\widetilde{V}^{(i)}$.

Аналогично $V_m^{(3)}$ можно представить как

$$V_m^{(3)} = \sum_{k=1}^{k_L(\xi)} c_{km}^L \widetilde{V}_k^{(3)} + \int_{p_0^2}^{\infty} c_m^L (\beta)\, \widetilde{V}^{(3)} (z, \beta)\, d\beta, \qquad (1.17)$$

где

$$c_{km}^L = \frac{1}{p_{kL}^2 (\xi) - p^2} \frac{D_{km}^L}{I_{kL}}, \qquad c_m^L = \frac{D_m^L}{\beta (\xi) - p^2};$$

$$D_{km}^L = \int_0^\infty f_m^{(3)} \widetilde{V}_k^{(3)} dz, \qquad D_m^L = \int_0^\infty f_m^{(3)} \widetilde{\widetilde{V}}{}^{(3)} dz, \qquad (1.18)$$

$$I_{kL} = \int_0^\infty \rho\, (\widetilde{V}_k^{(3)})^2\, dz.$$

При выводе используются соотношения ортогональности:

$$\int_0^\infty \rho \widetilde{V}_i^{(3)} \widetilde{V}_j^{(3)} dz = 0 \qquad \text{при } i \neq j,$$

$$\int_0^\infty \rho \widetilde{V}^{(3)} (p^2)\, \widetilde{\widetilde{V}}{}^{(3)} (\beta)\, dz = \delta (p^2 - \beta).$$

Подставляя найденные выражения для $V_m^{(i)}$ в (1.10), получаем окончательные точные формулы для смещений:

$$u_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt} \left\{ \mathrm{v.} \int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{K_R(\xi)} c_{km}^R \widetilde{V}_k^{(1)} + \int_{p_0^2}^{\infty} c_m^R (\beta)\, \widetilde{V}^{(1)} d\beta \right) Y_m \right] \xi d\xi \right\} dp,$$

$$u_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt} \left\{ \mathrm{v.} \int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{K_R(\xi)} c_{km}^R \widetilde{V}_k^{(2)} + \int_{p_0^2}^{\infty} c_m^R (\beta)\, \widetilde{V}^{(2)} d\beta \right) \frac{\partial Y_m}{\partial r} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^{K_L(\xi)} c_{km}^L \widetilde{V}_k^{(3)} + \int_{p_0^2}^{\infty} c_m^L (\beta)\, \widetilde{V}^{(3)} d\beta \right) \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi} \right) \right] d\xi \right\} dp, \qquad (1.19)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt} \left\{ \mathrm{v.} \int_0^\infty \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^{K_R(\xi)} c_{km}^R \widetilde{V}_k^{(2)} + \int_{p_0^2}^{\infty} c_m^R (\beta) \widetilde{V}^{(2)} d\beta \right) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi} - \left(\sum_{k=1}^{K_L(\xi)} c_{km}^L \widetilde{V}_k^{(3)} + \int_{p_0^2}^{\infty} c_m^L (\beta)\, \widetilde{V}^{(3)} d\beta \right) \frac{\partial Y_m}{\partial r} \right) \right] d\xi \right\} dp.$$

Можно показать, что полученное решение нестационарной задачи удовлетворяет нулевым начальным условиям (1.4a). Действительно, при фиксированном ξ функциями p в (1.19), помимо e^{ipt}, являются только коэффициенты c^Q_{km}, c^Q_m — регулярные функции p, всюду, кроме конечного числа точек при $\operatorname{Im} p \geqslant 0$, убывающие при $p \to \infty$ не медленнее, чем $O(1/p^{1+|\varepsilon|})$. Меняя порядок интегрирования по p и ξ и замыкая контур интегрирования по p в нижнюю полуплоскость, получаем нулевые значения $\mathbf{u}(t)$ и $d\mathbf{u}/dt$ при $t < 0$.

Асимптотика при больших r. На больших расстояниях r, не соизмеримых с линейными размерами сейсмического источника, главная часть возмущения, описываемого формулами (1.19), переносится поверхностными волнами Рэлея и Лява. Их вклад равен сумме вычетов по полюсам слагаемых в подынтегральных функциях, стоящих под знаками сумм $\left[\sum\limits_{k=1}^{K_Q(\xi)}\right]$. Сохраняя только члены, убывающие не быстрее r^{-1}, можно получить следующие асимптотические формулы для смещений на больших r [5]:

$$u_z(t,z,r,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \int\limits_{\bar p}^{\infty} \frac{\exp i\left(pt - \frac{\pi}{4}\right)}{p} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=1}^{K_R(p)} U_{kR}(p,\varphi)\, \tilde V_k^{(1)}(p,z) \frac{\sqrt{\xi_{kR}}}{C_{kR} I_{kR}} \exp(-i\xi_{kR} r)\right] dp,$$

$$u_r(t,z,r,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \int\limits_{\bar p}^{\infty} \frac{\exp i\left(pt - \frac{3\pi}{4}\right)}{p} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=1}^{K_R(p)} U_{kR}(p,\varphi)\, \tilde V_k^{(2)}(p,z) \frac{\sqrt{\xi_{kR}}}{C_{kR} I_{kR}} \exp(-i\xi_{kR} r)\right] dp, \qquad (1.20)$$

$$u_\varphi(t,z,r,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \int\limits_{\bar p}^{\infty} \frac{\exp i\left(pt + \frac{\pi}{4}\right)}{p} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=1}^{K_L(p)} U_{kL}(p,\varphi)\, \tilde V_k^{(3)}(p,z) \frac{\sqrt{\xi_{kL}}}{C_{kL} I_{kL}} \exp(-i\xi_{kL} r)\right] dp.$$

Здесь для $Q = R, L$ $K_Q(p)$ — максимальное число гармоник волн Рэлея (R) и Лява (L), существующих при данном p;

$$U_{kQ}(p,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D^Q_{km} \exp im\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (1.21)$$

ξ_{kQ} — волновое число, корень уравнения $p^2_{kQ}(\xi) - p^2 = 0$. Фазовая и групповая скорости k-й гармоники v_{kQ} и C_{kQ} выражаются через ξ_{kQ} так:

$$v_{kQ} = \frac{p}{\xi_{kQ}}, \qquad C_{kQ} = \frac{dp_{kQ}}{d\xi}\,(\xi = \xi_{kQ}). \qquad (1.22)$$

$\bar p$ — граничная частота; колебания с частотой, меньшей $\bar p$, описывают квазистатическую часть возмущения и не представляют для нас интереса.

При выводе формул (1.20) использовались асимптотические соотношения:

$$\text{v.} \int\limits_0^{\infty} \frac{\Phi(\xi) J_m(\xi r)\,\xi\, d\xi}{p^2_{kQ}(\xi) - p^2} \approx \sqrt{\frac{\pi\xi_{kQ}}{2r}}\, \frac{\Phi(\xi_{kQ})}{pC_{kQ}} \times$$

$$\times \exp\left\{-i\left[\xi_{kQ} r - \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

$$\text{v.} \int\limits_0^{\infty} \frac{\Phi(\xi) \frac{dJ_m(\xi r)}{dr}\, d\xi}{p^2_{kQ}(\xi) - p^2} \approx \sqrt{\frac{\pi\xi_{kQ}}{2r}}\, \frac{\Phi(\xi_{kQ})}{pC_{kQ}} \times$$

$$\times \exp\left\{-i\left[\xi_{kQ} r - \left(m - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Вертикальная u_z и радиальная u_r компоненты смещений обязаны волнам Рэлея, тангенциальная компонента u_φ — волнам Лява.

Выражения для p_{kQ}, C_{kQ} через интегралы от собственных функций. Для p_{kQ} и C_{kQ} методами теории возмущения можно получить формулы [2,15, 23]:

$$p^2_{kQ} = (\xi^2 G^Q_{1k} + 2\xi G^Q_{2k} + G^Q_{3k})/I_{kQ}, \qquad C_{kQ} = (\xi G^Q_{1k} + G^Q_{2k})/p_{kQ} I_{kQ}, \qquad (1.23)$$

где $G^Q_{1k} \div G^Q_{3k}$ — следующие интегралы:

$$G^R_{1k} = \int\limits_0^{\infty} [(\lambda + 2\mu)(\tilde V_k^{(2)})^2 + \mu(\tilde V_k^{(1)})^2]\, dz,$$

$$G^R_{2k} = \int\limits_0^{\infty} \left[\mu \frac{d\tilde V_k^{(2)}}{dz} \tilde V_k^{(1)} - \lambda \frac{d\tilde V_k^{(1)}}{dz} \tilde V_k^{(2)}\right] dz,$$

$$G^R_{3k} = \int\limits_0^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu)\left(\frac{d\tilde V_k^{(1)}}{dz}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\tilde V_k^{(2)}}{dz}\right)^2\right] dz, \qquad (1.24)$$

$$G_{1k}^L = \int_0^\infty \mu\,(\widetilde{V}_k^{(3)})^2 dz,$$

$$G_{2k}^L \equiv 0,$$

$$G_{3k}^L = \int_0^\infty \mu \left(\frac{d\widetilde{V}_k^{(3)}}{dz}\right)^2 dz.$$

Способ расчета p_{kR}, $\widetilde{V}_k^{(1)}$ и $\widetilde{V}^{(2)}$ описан в [11,21], способ расчета p_{kL}, $\widetilde{V}_k^{(3)}$ — в [2,15].

Поверхностные волны от элементарных источников. Рассмотрим, какой вид приобретают формулы (1.19) для элементарных источников: осесимметричных вертикального и радиального воздействий, вращательного воздействия, поля горизонтальных сил, диполей, центра расширения. Поля многих более сложных источников могут быть получены суммированием полей от этих элементарных источников с соответствующими коэффициентами пропорциональности. Поскольку в формулах (1.19) от источника зависит только функция U_{kQ}, будем в дальнейшем рассматривать только выражения для U_{kQ} при различных воздействиях.

I. *Вертикальное осесимметричное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_z(t, z, r)\,\mathbf{a}_z.$$

В этом случае из (1.7) получаем:

$$f_0^{(1)}(z, \xi, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty F_z J_0(\xi r)\, r dr dt;$$

$$f_m^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \quad f_m^{(2)} \equiv f_m^{(3)} \equiv 0;$$

$$D_{k0}^R = \int_0^\infty f_0^{(1)}(z, \xi_{kR}, p)\, \widetilde{V}_k^{(1)}(z, \xi_{kR})\, dz;$$

$$D_{km}^R = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \quad D_{km}^L \equiv 0.$$

В итоге

$$U_{kR} = \int_0^\infty f_0^{(1)} \widetilde{V}_k^{(1)} dz, \qquad U_{kL} = 0. \tag{1.25}$$

В частности, для идеально сосредоточенной в точке $z = h$, $r = 0$ вертикальной силы $\mathbf{F} = \delta(z-h)\,\dfrac{\delta(r)}{r}\,\varphi(t)\mathbf{a}_z$

$$U_{kR} = \widetilde{V}_k^{(1)}(h, p)\, S(p). \tag{1.26}$$

Здесь и далее $S(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\varphi(t)\,dt$ — временной спектр источника.

II. *Радиальное осесимметричное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_r(t, z, r)\,\mathbf{a}_r.$$

В этом случае из (1.7) имеем:

$$f_0^{(2)} = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty F_r J_1(\xi r)\, r dr\, dt; \qquad f_m^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0;$$

$$f_m^{(1)} \equiv f_m^{(3)} \equiv 0;$$

$$D_{k0}^R = -\int_0^\infty f_0^{(2)} \widetilde{V}_k^{(2)} dz; \qquad D_{km}^R = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0;\ D_{km}^L \equiv 0.$$

Отсюда

$$U_{kR} = -\int_0^\infty f_0^{(2)} \widetilde{V}_k^{(2)} dz, \qquad U_{kL} = 0. \tag{1.27}$$

В частном случае идеально сосредоточенного в точке $z = h$, $r = 0$ радиального источника $\mathbf{F} = 2\delta(z-h)\,\dfrac{\delta(r)}{r^2}\,\varphi(t)\,\mathbf{a}_r$

$$U_{kR} = -\,\xi_{kR} \widetilde{V}_k^{(2)}(h, p)\, S(p). \tag{1.28}$$

III. *Вращательное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_\varphi(t, z, r)\,\mathbf{a}_\varphi.$$

Из (1.7) получаем:

$$f_0^{(3)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty F_\varphi J_1(\xi r)\, r dr\, dt; \qquad f_m^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0;$$

$$f_m^{(1)} \equiv f_m^{(2)} \equiv 0; \qquad D_{km}^R \equiv 0; \qquad D_{k0}^L = \int_0^\infty f_0^{(3)} \widetilde{V}_k^{(3)} dz;$$

$$D_{km}^L = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0.$$

В результате

$$U_{kR} = 0, \qquad U_{kL} = \int_0^\infty f_0^{(3)} \widetilde{V}_k^{(3)} dz. \tag{1.29}$$

В частном случае сосредоточенного в точке $z = h$, $r = 0$ вращательного воздействия $\mathbf{F} = 2\delta(z-h)\frac{\delta(r)}{r^2}\varphi(t)\,\mathbf{a}_\varphi$

$$U_{kL} = \xi_{kL}\tilde{V}_k^{(3)}(h, p)\,S(p). \qquad (1.30)$$

IV. *Поле горизонтальных сил фиксированного направления.* Рассмотрим только частный случай такого поля сил

$$\mathbf{F} = F_T(t, z, r)\,\mathbf{a}_T,$$

где $\mathbf{a}_T$ — единичный горизонтальный вектор фиксированного направления:

$$(\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_z) = 0, \ (\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_r) = \cos(\delta - \varphi),$$

$$(\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_\varphi) = \sin(\delta - \varphi).$$

Тогда

$$\mathbf{F} = F_T[\cos(\delta-\varphi)\,\mathbf{a}_r + \sin(\delta-\varphi)\,\mathbf{a}_\varphi]$$

и из (1.7) имеем:

$$f_m^{(1)} \equiv 0; \quad f_m^{(2)} = f_m^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq \pm 1;$$

$$f_1^{(2)} = \frac{e^{-i\delta}}{2} f_T; \quad f_{-1}^{(2)} = -\frac{e^{-i\delta}}{2} f_T;$$

$$f_1^{(3)} = \frac{e^{-i\delta}}{2i} f_T; \quad f_{-1}^{(3)} = \frac{e^{i\delta}}{2i} f_T;$$

$$f_T = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\infty F_T J_0(\xi r)\, r\,dr\,dt.$$

Суммируя по m, получаем окончательно:

$$U_{kR} = i\cos(\delta-\varphi)\int_0^\infty f_T\tilde{V}_k^{(2)}dz, \qquad (1.31)$$

$$U_{kL} = -i\sin(\delta-\varphi)\int_0^\infty f_T\tilde{V}_k^{(3)}dz.$$

В частном случае идеально сосредоточенной в точке $r = 0$, $z = h$ горизонтальной силы $\mathbf{F} = \delta(z-h)\frac{\delta(r)}{r}\varphi(t)\,\mathbf{a}_T$;

$$U_{kR} = i\cos(\delta-\varphi)\,\tilde{V}_k^{(2)}(h, p)\,S(p), \qquad (1.32)$$

$$U_{kL} = -i\sin(\delta-\varphi)\,\tilde{V}_k^{(3)}(h, p)\,S(p).$$

V. *Произвольно ориентированная сосредоточенная сила.* Пусть

$$\mathbf{F} = \delta(z-h)\,\frac{\delta(r)}{r}\,[\mathbf{a}_z\cos\beta + \mathbf{a}_T\sin\beta]\,\varphi(t).$$

Комбинируя (1.25) и (1.32), получаем:

$$U_{kR} = [\cos\beta\tilde{V}_k^{(1)}(h, p) + i\sin\beta\cos(\delta-\varphi)\,\tilde{V}_k^{(2)}(h, p)]\,S(p), \qquad (1.33)$$

$$U_{kL} = -i\sin\beta\sin(\delta-\varphi)\,\tilde{V}_k^{(3)}(h, p)\,S(p).$$

VI. *Диполь без момента.* Поля диполя, образованного парой сил без момента

$$\mathbf{F}_\pm = \pm\delta(z-h)\,\frac{\delta(r)}{r}\,\varphi(t)\,[\mathbf{a}_z\cos\beta + \mathbf{a}_T\sin\beta],$$

получим (с точностью до членов, убывающих медленнее r^{-1}), применив к U_{kQ} из (1.33) оператор

$$\left[\cos\beta\frac{d}{dh} + i\xi_{kQ}\cos(\delta-\varphi)\sin\beta\right].$$

В результате найдем:

$$U_{kR} = \left[\cos^2\beta\,\frac{d\tilde{V}_k^{(1)}}{dh}(h, p) - \xi_{kR}\sin^2\beta\cos^2(\delta-\varphi)\,\tilde{V}_k^{(2)}(h, p) + \right. \qquad (1.34)$$

$$\left. + \frac{i}{2}\sin 2\beta\left(\cos(\delta-\varphi)\,\xi_{kR}\tilde{V}_k^{(1)}(h, p) + \frac{d\tilde{V}_k^{(2)}}{dh}(h, p)\right)\right]S(p),$$

$$U_{kL} = -i\sin\beta\sin(\delta-\varphi)\left[\cos\beta\,\frac{d\tilde{V}_k^{(3)}}{dh}(h, p) + \right.$$

$$\left. + i\xi_{kL}\cos(\delta-\varphi)\sin\beta\,\tilde{V}_k^{(3)}(h, p)\right]S(p).$$

VII. *Диполь с моментом.* Пусть пара сил действует в тех же направлениях, что и в VI, но существует момент сил; ось диполя, т. е. линия, соединяющая точки приложения сил, задана вектором $\mathbf{a}_n$, где

$$(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_z) = \cos\gamma, \ (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_r) = \sin\gamma\cos(\alpha-\varphi);$$

$$(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_\varphi) = \sin\gamma\sin(\alpha-\varphi).$$

Углы γ, δ, β, α не независимы, а связаны соотношением $\operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\beta = -\cos(\delta-\alpha)$. Поле смещений от такого диполя на больших расстояниях r получим, применив к U_{kQ} в (1.33) оператор

$$\left[\cos\gamma\,\frac{d}{dh} + i\xi_{kQ}\cos(\alpha-\varphi)\sin\gamma\right].$$

В результате имеем:

$$U_{kR}=\Big[\cos\gamma\cos\beta\frac{d\tilde V_k^{(1)}}{dh}(h,p)-\xi_{kR}\sin\beta\sin\gamma\cos(\delta-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\times$$
$$\times\tilde V_k^{(2)}(h,p)+i\xi_{kR}\sin\gamma\cos\beta\cos(\alpha-\varphi)\tilde V_k^{(1)}(h,p)+$$
$$+i\cos\gamma\sin\beta\cos(\delta-\varphi)\frac{d\tilde V_k^{(2)}}{dh}(h,p)\Big]\times S(p),$$

$$U_{kL}=-i\sin\beta\sin(\delta-\varphi)\Big[\cos\gamma\frac{d\tilde V_k^{(3)}}{dh}(h,p)+i\xi_{kL}\sin\gamma\cos(\alpha-\varphi)\times$$
$$\times\tilde V_k^{(3)}(h,p)\Big]\times S(p).$$

VIII. *Центр расширения.* Центр расширения можно заменить эквивалентным источником из трех ортогональных диполей без момента. Направим один диполь вертикально ($\beta=0$), а два других горизонтально ($\beta=\pi/2$, $\delta=0$ и $\pi/2$). Суммируя поля, получаем

$$U_{kR}=\Big[\frac{d\tilde V_k^{(1)}}{dh}(h,p)-\xi_{kR}\tilde V_k^{(2)}\Big]\times S(p),\qquad U_{kL}=0. \tag{1.35}$$

2. ПОЛЕ СМЕЩЕНИЙ В УПРУГОМ ШАРЕ

Постановка задачи. Рассмотрим упругий шар с координатами R,θ,φ $(0\leqslant R\leqslant R_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi)$. Уравнения движения в этих координатах имеют вид [7]:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\widehat{\theta R}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\widehat{\varphi R}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widehat{RR}}{\partial R}+\frac{1}{R}(2\widehat{RR}-\widehat{\theta\theta}-\widehat{\varphi\varphi}+\widehat{\theta R}\times$$
$$\times\operatorname{ctg}\theta)=\rho\frac{\partial^2u_R}{\partial t^2}-F_R,$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\widehat{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\widehat{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widehat{\theta R}}{\partial R}+\frac{1}{R}[3\widehat{\theta R}+(\widehat{\theta\theta}-\widehat{\varphi\varphi})\times$$
$$\times\operatorname{ctg}\theta]=\rho\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2}-F_\theta, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial\widehat{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\widehat{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\widehat{\varphi R}}{\partial R}+$$
$$+\frac{1}{R}[3\widehat{\varphi R}+2\widehat{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta]=\rho\frac{\partial^2u_\varphi}{\partial t^2}-F_\varphi.$$

Здесь $\widehat{\theta R}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{\theta\varphi}$, $\widehat{\varphi R}$, $\widehat{\varphi\varphi}$, $\widehat{RR}$ — компоненты тензора напряжений; u_R; u_θ, u_φ — компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$ по ортам $\mathbf{a}_R$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_\varphi$; F_R, F_θ, F_φ — компоненты вектора объемных сил, действующих в источнике, по тем же ортам.

Для компонент напряжений справедливы формулы

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta R}&=\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta}\right),\\
\widehat{\theta\theta}&=\lambda\Delta+2\frac{\mu}{R}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_R\right),\\
\widehat{\theta\varphi}&=\frac{\mu}{R}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right),\\
\widehat{\varphi R}&=\mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial\varphi}\right),\\
\widehat{\varphi\varphi}&=\lambda\Delta+2\frac{\mu}{R}\left(u_R+u_\theta\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right),\\
\widehat{RR}&=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_R}{\partial R}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь дилатация Δ имеет вид

$$\Delta=\frac{\partial u_R}{\partial R}+\frac{2u_R}{R}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{R}\operatorname{ctg}\theta. \tag{2.3}$$

Константы Ламэ λ, μ и плотность ρ — кусочно непрерывные положительные функции одной координаты R; компоненты смещений и напряжений непрерывны и ограничены на всем отрезке $[0, R_0]$. Поверхность шара свободна от напряжений, т. е.

$$\widehat{\theta R}=\widehat{\varphi R}=\widehat{RR}=0\quad\text{при}\quad R=R_0. \tag{2.4}$$

Начальные условия:

$$\mathbf{u}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=0\quad\text{при}\quad t<0. \tag{2.4a}$$

Поле сил $\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi)$ описывает действие локализованного во времени и пространстве источника. На $\mathbf{F}$ наложены следующие ограничения:

1) $\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi)=0$ при $t<0$;
2) $\mathbf{F}(t, R, \theta, \varphi)$

абсолютно интегрируемо по t и подчиняется условиям Дирихле относительно всех аргументов.

Тогда допустимо следующее разложение:

$$\mathbf{F}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ipt}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{i=1}^{3}f_{mn}^{(i)}(R,p)\,\mathbf{A}_{mn}\Big]dp, \tag{2.5}$$

где

$$\mathbf{A}_{mn}^{(1)} = \mathbf{a}_R Y_{mn},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(2)} = \left(\mathbf{a}_\theta \frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{N},$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{(3)} = \left(\mathbf{a}_\theta \frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta} - \mathbf{a}_\varphi \frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\right)\frac{1}{N}, \qquad (2.6^1)$$

$$Y_{mn}(\theta, \varphi) = e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta),$$

$$N = \sqrt{n(n+1)}.$$

$P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра, определенные согласно следующим формулам [8]:

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n \cdot n!}\frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} \qquad \text{при} \quad m \geqslant 0,$$

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}P_n^{|m|}(x) \qquad \text{при} \quad m<0.$$

Система векторных сферических функций $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$ является полной системой векторов, удовлетворяющих следующим условиям ортогональности на единичной сфере:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\mathbf{A}_{mn}^{(i)}, \overline{\mathbf{A}}_{lq}^{(j)})\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi\delta_{ij}\delta_{ml}\delta_{nq}\frac{(n+m)!}{(n-m)!\,(2n+1)}.$$

В работе Г. И. Петрашень [11] для решения аналогичной задачи теории упругости была предложена другая система векторных функций, являющаяся линейной комбинацией системы $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$. В отличие от [11], где волновое поле в шаре ищется в виде суммы потенциального и соленоидального полей, разложение волнового поля по системе $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$ позволяет отдельно исследовать сфероидальные и крутильные колебания шара [22]. Все доказательства ортогональности и полноты системы, рассмотренной в [11], легко перенести на систему $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$.

Коэффициенты $f_{mn}^{(i)}$ разложения внешнего воздействия $\mathbf{F}$ по системе $\mathbf{A}_{mn}^{(i)}$ имеют вид

$$f_{mn}^{(i)}(R, p) = \frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\mathbf{F}, \overline{\mathbf{A}}_{mn}^{(i)})\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt.$$

---

[1] При $n=0$ $N=0$, $Y_{mn}=\text{const}$ и (2.6) теряет смысл. Будем считать, что $A_{00}^{(2)} = A_{00}^{(3)} = 0$.

Конкретно для $i = 1, 2, 3$ имеем:

$$f_{mn}^{(1)} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_R \overline{Y}_{mn}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt,$$

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(2)} &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{4\pi N}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[F_\theta \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial\theta} + F_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\overline{Y}_{mn}}{\partial\varphi}\right] \times \\ &\qquad \times \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt, \\ f_{mn}^{(3)} &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{4\pi N}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[F_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial\varphi} - F_\varphi \frac{\partial\overline{Y}_{mn}}{\partial\theta}\right] \times \\ &\qquad \times \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt, \end{aligned} \qquad (2.7)$$

$$\overline{Y}_{mn}(\theta, \varphi) = e^{-im\varphi}p_n^m(\cos\theta).$$

Для компонент сил F_R, F_θ, F_φ получим из (2.5), (2.6):

$$F_R = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_{mn}^{(1)}Y_{mn}\right]dp,$$

$$F_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(f_{mn}^{(2)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + f_{mn}^{(3)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\right)\right]dp, \quad (2.8)$$

$$F_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(f_{mn}^{(2)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi} - f_{mn}^{(3)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\right)\right]dp.$$

Формулы для смещений. Будем искать смещения в виде

$$\mathbf{u}(t, R, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{i=1}^{3} V_{mn}^{(i)}\mathbf{A}_{mn}^{(i)}\right]dp, \qquad (2.9)$$

где $V_{mn}^{(i)} = V_{mn}^{(i)}(R, p)$. Отсюда для проекций смещения на орты $\mathbf{a}_R$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_\varphi$ получим:

$$u_R = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} V_{mn}^{(1)}Y_{mn}\right]dp,$$

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(V_{mn}^{(2)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + V_{mn}^{(3)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\right)\right]dp, \qquad (2.10)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\left(V_{mn}^{(2)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi} - V_{mn}^{(3)}\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\right)\right]dp.$$

Подставляя (2.8), (2.10) в уравнения (2.1) и граничные условия, найдем следующие уравнения для $V_{mn}^{(i)}$.

1. Для $V_{mn}^{(1)}$, $V_{mn}^{(2)}$:

$$l_1(V_{mn}^{(1)}, V_{mn}^{(2)}) \equiv \frac{d}{dR}\left[(\lambda+2\mu)\frac{dV_{mn}^{(1)}}{dR} + \frac{2\lambda}{R}V_{mn}^{(1)} - \frac{\lambda N}{R}V_{mn}^{(2)}\right] + \frac{\mu}{R^2}\left[4\frac{dV_{mn}^{(1)}}{dR}R - 4V_{mn}^{(1)} + N\left(3V_{mn}^{(2)} - R\frac{dV_{mn}^{(2)}}{dR} - NV_{mn}^{(1)}\right)\right] + p^2\rho V_{mn}^{(1)} = -f_{mn}^{(1)},$$

$$l_2(V_{mn}^{(1)}, V_{mn}^{(2)}) \equiv \frac{d}{dR}\left[\mu\left(\frac{dV_{mn}^{(2)}}{dR} - \frac{V_{mn}^{(2)}}{R} + \frac{NV_{mn}^{(1)}}{R}\right)\right] + \frac{\lambda N}{R}\left(\frac{dV_{mn}^{(1)}}{dR} + \frac{2}{R}V_{mn}^{(1)} - \frac{N}{R}V_{mn}^{(2)}\right) + \frac{\mu}{R^2}\left(5NV_{mn}^{(1)} + 3R\frac{dV_{mn}^{(2)}}{dR} - V_{mn}^{(2)} - 2N^2V_{mn}^{(2)}\right) + p^2\rho V_{mn}^{(2)} = -f_{mn}^{(2)} \tag{2.11}$$

при граничных условиях:

$$\sigma_{RR} \equiv (\lambda+2\mu)\frac{dV_{mn}^{(1)}}{dR} + \frac{2\lambda}{R}V_{mn}^{(1)} - \frac{\lambda N}{R}V_{mn}^{(2)} = 0,$$

$$\tau_{\theta R} \equiv \mu\left(\frac{dV_{mn}^{(2)}}{dR} - \frac{V_{mn}^{(2)}}{R} + \frac{NV_{mn}^{(1)}}{R}\right) = 0 \quad \text{при} \quad R = R_0, \tag{2.12}$$

$$V_{mn}^{(1)} = V_{mn}^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad R = 0.$$

Функции $V_{mn}^{(1)}$, $V_{mn}^{(2)}$, σ_{RR} и $\tau_{\theta R}$ непрерывны и ограничены на всем отрезке $[0, R_0]$.

2. Для $V_{mn}^{(3)}$ имеем

$$l_3(V_{mn}^{(3)}) \equiv \frac{d}{dR}\left[\mu\left(\frac{dV_{mn}^{(3)}}{dR} - \frac{V_{mn}^{(3)}}{R}\right)\right] + \frac{3\mu}{R}\frac{dV_{mn}^{(3)}}{dR} - \frac{\mu}{R^2}(N^2+1)V_{mn}^{(3)} + p^2\rho V_{mn}^{(3)} = -f_{mn}^{(3)} \tag{2.13}$$

и граничные условия:

$$\tau_{\varphi R} \equiv \mu\left(\frac{dV_{mn}^{(3)}}{dR} - \frac{V_{mn}^{(3)}}{R}\right) = 0 \quad \text{при} \quad R = R_0,$$

$$V_{mn}^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad R = 0. \tag{2.14}$$

Функции $V_{mn}^{(3)}$, $\tau_{\varphi R}$ непрерывны и ограничены на всем отрезке $[0, R_0]$.

Представление V_{mn} через собственные функции. $V_{mn}^{(i)}$ $(i = 1,2)$ можно представить следующим образом:

$$V_{mn}^{(i)} = \frac{1}{R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty} c_{kmn}^S \widetilde{V}_{kn}^{(i)}, \tag{2.15}$$

где для коэффициентов c_{kmn}^S имеем:

$$c_{kmn}^S = \frac{1}{p_{knS}^2 - p^2}\frac{D_{kmn}^S}{I_{knS}}, \tag{2.16}$$

$$D_{kmn}^S = \int_0^{R_0} (f_{mn}^{(1)}\widetilde{V}_{kn}^{(1)} + f_{mn}^{(2)}\widetilde{V}_{kn}^{(2)}) R^2\, dR,$$

$$I_{knS} = \frac{1}{R_0^2}\int_0^{R_0} \rho R^2 [(\widetilde{V}_{kn}^{(1)})^2 + (\widetilde{V}_{kn}^{(2)})^2]\, dR.$$

Здесь $\widetilde{V}_{kn}^{(i)}(R)$, $i = 1,2$ — собственные функции, а p_{knS}^2 — собственные значения оператора, образованного левыми частями (2.11) и граничными условиями (2.12), при заданном значении целочисленного параметра n.

Аналогично

$$V_{mn}^{(3)} = \frac{1}{R_0^2}\sum_{k=1}^{\infty} c_{kmn}^T \widetilde{V}_{kn}^{(3)}, \tag{2.17}$$

где

$$c_{kmn}^T = \frac{1}{p_{knT}^2 - p^2}\frac{D_{kmn}^T}{I_{knT}},$$

$$D_{kmn}^T = \int_0^{R_0} f_{mn}^{(3)}\widetilde{V}_{kn}^{(3)} R^2\, dR, \tag{2.18}$$

$$I_{knT} = \frac{1}{R_0^2}\int_0^{R_0} \rho R^2 (\widetilde{V}_{kn}^{(3)})^2\, dR.$$

Здесь $\widetilde{V}_{kn}^{(3)}$ — собственные функции, а p_{knT}^2 — собственные значения оператора, образованного левой частью (2.13) и граничными условиями (2.14).

При выводе (2.15)—(2.18) использовались условия ортогональности:

$$\int_0^{R_0} \rho R^2 (\widetilde{V}_{kn}^{(1)}\widetilde{V}_{ln}^{(1)} + \widetilde{V}_{kn}^{(2)}\widetilde{V}_{ln}^{(2)})\, dR = 0,$$

$$\int_0^{R_0} \rho R^2 (\widetilde{V}_{kn}^{(3)}\widetilde{V}_{ln}^{(3)})\, dR = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l.$$

Подставляя найденные для $V^{(i)}_{mn}(R, p)$ выражения в (2.10), получаем формулы для смещений:

$$u_R = \frac{1}{2\pi R_0^2}\,\mathrm{v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} c^S_{kmn}(p)\,\widetilde{V}^{(1)}_{kn}(R)\,Y_{mn}\Big]\,dp,$$

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi R_0^2}\,\mathrm{v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(c^S_{kmn}(p)\,\widetilde{V}^{(2)}_{kn}(R)\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + {}$$

$$+ c^T_{kmn}(p)\,\widetilde{V}^{(3)}_{kn}(R)\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\Big)\Big]\,dp, \qquad (2.19)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi R_0^2}\,\mathrm{v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(c^S_{kmn}(p)\,\widetilde{V}^{(2)}_{kn}(R)\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi} - {}$$

$$- c^T_{kmn}(p)\,\widetilde{V}^{(3)}_{kn}(R)\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\Big)\Big]\,dp.$$

Доказательство того, что построенное решение (2.19) удовлетворяет начальным условиям (2.4а), проводится аналогично плоскому случаю для каждого члена ряда $\sum\limits_{m,\,n}$.

Представление смещений в виде суммы собственных колебаний шара. В формулах (2.19) только множители типа $c^Q_{mn}\,e^{ipt}$ зависят от p. Поэтому вычисление интегралов по p сводится к нахождению значений интегралов типа $\mathrm{v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ipt}\psi(p)}{\alpha^2-p^2}\,dp$. При введенных ограничениях на источник $\psi(p)$ может иметь особенность при $\mathrm{Im}\,p \geqslant 0$ и регулярна в нижней полуплоскости. При $p\to\infty$ $\psi(p)\to 0$. Кроме того, $\psi(-p) = \overline{\psi(p)}$. Отсюда нетрудно получить

$$\mathrm{v.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ipt}\,\frac{\psi(p)}{\alpha^2-p^2}\,dp = 2\,\mathrm{Re}\Big[\mathrm{v.}\int\limits_{0}^{\infty} e^{ipt}\,\frac{\psi(p)}{\alpha^2-p^2}\,dp\Big] =$$

$$= \frac{2\pi}{\alpha}\,\mathrm{Re}\,[\psi(\alpha)\,e^{i(\alpha t-\pi/2)}] + a(t).$$

Функция $a(t)$ связана с особенностями спектральной функции источника $f^{(i)}_{mn}$ в верхней полуплоскости или при $p = 0$. Она описывает либо не представляющее для нас интереса экспоненциально затухающее во времени, либо статическое возмущение.

Применяя полученное соотношение к (2.19) и пренебрегая $a(t)$, получаем:

$$u_R = \frac{1}{R_0^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\Big[i\Big(p_{knS}t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\,D^S_{kmn}\,\frac{\widetilde{V}^{(1)}_{kn}(R)}{p_{knS}}\,\frac{Y_{mn}}{I_{knS}},$$

$$u_\theta = \frac{1}{R_0^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\exp\Big[i\Big(p_{knS}t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\,D^S_{kmn}\,\frac{\widetilde{V}^{(2)}_{kn}(R)}{p_{knS}I_{knS}}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta} + {}$$

$$+ \exp\Big[i\Big(p_{knT}t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\,D^T_{kmn}\,\frac{\widetilde{V}^{(3)}_{kn}(R)}{p_{knT}I_{knT}\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\Big\}, \qquad (2.19\text{a})$$

$$u_\varphi = \frac{1}{R_0^2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\exp\Big[i\Big(p_{knS}t-\frac{\pi}{2}\Big)\,D^S_{kmn}\times$$

$$\times\frac{\widetilde{V}^{(2)}_{kn}(R)}{I_{knS}p_{knS}\sin\theta}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\varphi}\Big] - \exp\Big[i\Big(p_{knT}t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\,D^T_{kmn}\,\frac{\widetilde{V}^{(3)}_{kn}(R)}{I_{knT}p_{knT}}\,\frac{\partial Y_{mn}}{\partial\theta}\Big\}.$$

Таким образом, мы представили смещения в виде суммы собственных сфероидальных S и крутильных T колебаний шара с дискретными частотами p_{knS} и p_{knT}. Радиальная компонента u_R обязана только сфероидальным колебаниям, компоненты u_θ и u_φ — как сфероидальным, так и крутильным колебаниям.

Асимптотика смещений при $n\sin\theta \gg |m|$. Для выделения из смещений, описываемых формулами (2.19а), бегущих поверхностных волн будем следовать [13]. Изменим порядок суммирования (т. е. заменим сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-n}^{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ суммой $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}$) и заменим суммирование по n интегрированием по контуру L, охватывающему положительную часть действительной оси плоскости комплексного переменного ν, где $n = \mathrm{Ent}\,(\mathrm{Re}\,\nu)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n P^m_n(\cos\theta) = -\frac{1}{2i}\oint\limits_{L}\frac{f(\nu)\,P^m_\nu(\cos(\pi-\theta))\,(-1)^m\,d\nu}{\cos\pi\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)}.$$

Представляя $(\cos\pi(\nu+{}^1/_2))^{-1}$ при $\mathrm{Im}\,\nu\geqslant 0$ рядом $2\sum\limits_{l=0}^{\infty}(-1)^l\exp[i(2l+1)(\nu+{}^1/_2)\pi]$, а при $\mathrm{Im}\,\nu<0$ рядом $2\sum\limits_{l=0}^{\infty}(-1)^l\exp[-i(2l+1)(\nu+{}^1/_2)\pi]$, устремляя контур интегрирования к действительной оси и вводя новую переменную $p^-_{\ldots}=$

$= p_{kQ}(\nu)$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^m(\cos\theta) \approx 2\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+|m|} \int_0^{\infty} f(p)\, P_\nu^m(\cos(\pi-\theta)) \times$$
$$\times \sin\left[(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right] \frac{d\nu}{dp}\, dp.$$

Исключив из рассмотрения низкочастотную часть поля с $p < \bar{p}$ и применив асимптотику присоединенных полиномов Лежандра для больших значений $n \sin\theta \gg |m|$, найдем

$$\sum_{\mathrm{Ent}[\nu(\bar{p})]}^{\infty} f_n P_n^m(\cos\theta) \approx \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sin\theta}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \int_{\bar{p}}^{\infty} \nu^{m-1/2} f(p)\, \frac{d\nu}{dp} \times$$
$$\times \cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta) - \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right] \sin\left[(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right] dp.$$

Применяя аналогичные асимптотические преобразования к сумме

$$\sum_{\mathrm{Ent}[\nu(p)]}^{\infty} f_n \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta},$$

получаем

$$\sum_{\mathrm{Ent}[\nu(\bar{p})]}^{\infty} f_n \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sin\theta}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \int_{\bar{p}}^{\infty} \nu^{m+1/2} f(p)\, \frac{d\nu}{dp} \times$$
$$\times \cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta) - \frac{3\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right] \sin\left[(2l+1)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right] dp.$$

Используя эти формулы для преобразования (2.19а), можно получить следующие асимптотические выражения для смещений в поверхностных волнах, l раз обежавших шар и при этом g раз прошедших через полюс $\theta = 0$ и антиполюс $\theta = \pi$ шара:

$$u_R(t, R, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_0 \sin\theta}} \operatorname{Re} \int_{\bar{p}}^{\infty} \frac{1}{p} \exp\left[i\left(pt + \frac{\pi}{4}(2g-1)\right)\right] \times$$
$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{K_S(p)} \frac{U_{kS}(p, \varphi)}{I_{k\nu S} C_{kS}} \sqrt{\frac{\nu_{kS}}{R_0}}\, \widetilde{V}_{k\nu}^{(1)} \exp\left[-i\left(\nu_{kS}+\frac{1}{2}\right)\widetilde{\theta}\right] \right\} dp, \tag{2.20}$$

$$u_\theta(t, R, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_0 \sin\theta}} \operatorname{Re} \int_{\bar{p}}^{\infty} \frac{1}{p} \exp\left[i\left(pt - \frac{\pi}{4}(2g+3)\right)\right] \times$$
$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{K_S(p)} \frac{U_{kS}(p, \varphi)}{I_{k\nu S} C_{kS}} \sqrt{\frac{\nu_{kS}}{R_0}}\, \widetilde{V}_{k\nu}^{(2)} \exp\left[-i\left(\nu_{kS}+\frac{1}{2}\right)\widetilde{\theta}\right] \right\} dp,$$

$$u_\varphi(t, R, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_0 \sin\theta}} \operatorname{Re} \int_{\bar{p}}^{\infty} \frac{1}{p} \exp\left[i\left(pt - \frac{\pi}{4}(2g-1)\right)\right] \times$$
$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{K_T(p)} \frac{U_{KT}(p, \varphi)}{I_{k\nu T} C_{kT}} \widetilde{V}_{k\nu}^{(3)} \exp\left[-i\left(\nu_{kT}+\frac{1}{2}\right)\widetilde{\theta}\right] \right\} dp.$$

Здесь для $Q = S,\ T$, $K_Q(p)$ — максимальное число гармоник, существующих в волнах Рэлея ($Q = S$) и Лява ($Q = T$) при данном p:

$$U_{kQ} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu_{kQ}^{m-1} D_{kmn}^{Q} \exp\left[im\left(\varphi + (-1)^g \pi/2\right)\right], \tag{2.21}$$

где ν_{kQ} — аналог волнового числа, корень уравнения $p_{kQ}^2(\nu) - p^2 = 0$.

Фазовая и групповая скорости k-й гармоники v_{kQ} и C_{kQ} вдоль поверхности шара выражаются через ν_{kQ}:

$$v_{kQ} = \frac{pR_0}{\nu_{kQ}+1/2}, \qquad C_{kQ} = R_0 \frac{dp_{kQ}}{d\nu}\ (\nu = \nu_{kQ}). \tag{2.22}$$

Полный путь пробега волны $\widetilde{\theta}\,(0 \leqslant \widetilde{\theta} < \infty)$ связан с координатой точки наблюдения $\theta\,(0 \leqslant \theta < \pi)$:

$$\widetilde{\theta} = (-1)^g \theta + 2\pi(g - l).$$

Компоненты u_R и u_θ обязаны волнам Рэлея, u_φ — волнам Лява.

Выражения для p_{kQ}, C_{kQ} через интегралы от собственных функций. Методами теории возмущений для $Q = S,\ T$ можно получить [23]

$$p_{k\nu Q}^2 = \frac{N^2 G_{1k}^Q + 2NG_{2k}^Q + G_{3k}^Q}{R_0^2 I_{k\nu Q}}, \qquad C_{kQ} = \frac{NG_{1k}^Q + G_{2k}^Q}{R_0 p_{kQ} I_{k\nu Q}}. \tag{2.23}$$

Здесь интегралы $G_{1k}^Q - G_{3k}^Q$ имеют вид:

$$G_{1k}^S = \int_0^{R_0} \left[(\lambda+2\mu)(\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)})^2 + \mu(\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)})^2\right] dR,$$

$$G_{2k}^S = \int_0^{R_0} \left[\left(\mu \widetilde{V}_{k\nu}^{(1)} \frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}}{dR} - \lambda \widetilde{V}_{k\nu}^{(2)} \frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}}{dR}\right) R - (2\lambda+3\mu)\, \widetilde{V}_{k\nu}^{(1)} \widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}\right] dR,$$

$$G_{3k}^S = \int_0^{R_0} \left\{\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}}{dR}\right)^2 + \mu\left(\frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}}{dR}\right)^2\right] R^2 +\right.$$
$$\left. + 2\left(2\lambda \widetilde{V}_{k\nu}^{(1)} \frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}}{dR} - \mu \widetilde{V}_{k\nu}^{(2)} \frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}}{dR}\right) R + 4(\lambda+\mu)(\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)})^2 - \mu(\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)})^2\right\} dR, \tag{2.24}$$

$$G_{1k}^T = \int_0^{R_0} \mu (\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)})^2 \, dR,$$

$$G_{2k}^T \equiv 0,$$

$$G_{3k}^T = \int_0^{R_0} \mu \left[\left(\frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)}}{dR} \right)^2 R^2 - 2\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)} \frac{d\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)}}{dR} R - (\widetilde{V}_{k\nu}^{(3)})^2 \right] dR,$$

$$N = \sqrt{\nu(\nu+1)}.$$

Способ расчета $\widetilde{V}_{k\nu}^{(i)}$, $p_{k\nu Q}^{i}$ описан в [3,4, 14].

Поверхностные волны от элементарных источников. Тип источника влияет в (2.20) только на вид функции U_{kQ}. Рассмотрим выражения для U_{kQ} при различных элементарных воздействиях, считая $\nu \gg |m|$.

I. *Радиальная осесимметричная сила.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_R(t, R, \theta)\, \mathbf{a}_R.$$

Из (2.7) получаем:

$$\begin{aligned} f_{0\nu}^{(1)} &= (\nu_{kS} + {}^1/_2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^{\pi} F_R P_\nu(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, dt, \\ f_{m\nu}^{(1)} &= 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0, \quad f_{m\nu}^{(2)} \equiv f_{m\nu}^{(3)} \equiv 0, \\ U_{kS} &= \frac{1}{\nu_{kS}} \int_0^{R_0} f_{0\nu}^{(1)} \widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}(R) R^2 \, dR, \\ U_{kT} &= 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

В частности, для идеально сосредоточенной в точке $R = H$, $\theta = 0$ радиальной силы $\mathbf{F} = \delta(R-H) \dfrac{\delta(\theta)}{H^2 \sin\theta} \varphi(t)\, \mathbf{a}_R$

$$U_{kS} = \widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}(H) \times S(p), \tag{2.26}$$

де $S(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \varphi(t) \, dt$ — временнóй спектр источника.

II. *Меридиональная осесимметричная сила.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_\theta(t, R, \theta)\, \mathbf{a}_\theta.$$

В этом случае из (2.7) имеем:

$$\begin{aligned} f_{m\nu}^{(1)} &\equiv f_{m\nu}^{(3)} \equiv 0; \quad f_{m\nu}^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \\ f_{0\nu}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^{\pi} F_\theta \frac{dP_\nu(\cos\theta)}{d\theta} \sin\theta \, d\theta \, dt; \\ U_{kS} &= \frac{1}{\nu_{kS}} \int_0^{\infty} f_{0\nu}^{(2)} \widetilde{V}_{k\nu}^{(2)} R^2 \, dR; \\ U_{kT} &= 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

В частном случае идеально сосредоточенного в точке $R = H$, $\theta = 0$ меридионального воздействия

$$\mathbf{F} = \frac{2\delta(R-H)\,\delta(\theta)\,\varphi(t)}{H^3 \sin^2\theta} \mathbf{a}_\theta, \qquad U_{kS} = -\frac{\nu_{kS}}{H} \widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}(H)\, S(p). \tag{2.28}$$

III. *Вращательное воздействие.* Пусть

$$\mathbf{F} = F_\varphi(t, R, \theta)\, \mathbf{a}_\varphi.$$

Из (2.7) получаем:

$$\begin{aligned} f_{m\nu}^{(1)} &\equiv f_{m\nu}^{(2)} \equiv 0; \quad f_{m\nu}^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq 0; \\ f_{0\nu}^{(3)} &= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^{\pi} F_\varphi \frac{dP_\nu(\cos\theta)}{d\theta} \sin\theta \, d\theta \, dt; \end{aligned}$$

$$U_{kS} = 0; \qquad U_{kT} = -\frac{1}{\nu_{kT}} \int_0^{R_0} f_{0\nu}^{(3)} \widetilde{V}_{k\nu}^{(3)} R^2 \, dR. \tag{2.29}$$

В частном случае идеально сосредоточенного в точке $R = H$, $\theta = 0$ вращательного воздействия:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 2\delta(R-H) \frac{\delta(\theta)\,\varphi(t)}{H^3 \sin^2\theta} \mathbf{a}_\varphi, \\ U_{kT} &= \frac{\nu_{kT}}{H} \widetilde{V}_{k\nu}^{(3)}(H)\, S(p). \end{aligned} \tag{2.30}$$

IV. *Поле касательных сил фиксированного азимута.* Рассмотрим только частный случай такого поля сил:

$$\mathbf{F} = F_T(t, R, \theta)\, \mathbf{a}_T,$$

где $\mathbf{a}_T$ — единичный касательный вектор фиксированного азимута:

$$(\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_R) = 0, \quad (\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_\theta) = \cos(\delta - \varphi),$$

$$(\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_\varphi) = \sin(\delta - \varphi).$$

Тогда

$$\mathbf{F} = F_T\,[\mathbf{a}_\theta \cos(\delta - \varphi) + \mathbf{a}_\varphi \sin(\delta - \varphi)]$$

и из (2.7) получаем:

$$f^{(1)}_{m\nu} \equiv 0; \qquad f^{(2)}_{m\nu} = f^{(3)}_{m\nu} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq \pm 1;$$

$$f^{(2)}_{1\nu} = \frac{e^{-i\delta} f_{T\nu}}{2\nu(\nu+1)}; \qquad f^{(2)}_{-1\nu} = \frac{-e^{-i\delta} f_{T\nu}}{2};$$

$$f^{(3)}_{1\nu} = \frac{e^{-i\delta} f_{T\nu}}{2i\nu(\nu+1)}; \qquad f^{(3)}_{-1\nu} = \frac{e^{i\delta} f_{T\nu}}{2i};$$

$$f_{T\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} \int_0^\pi F_T \left(\frac{dP^1_\nu}{d\theta} + \frac{P^1_\nu}{\sin\theta} \right) \sin\theta\, d\theta\, dt.$$

Суммируя по m, имеем:

$$U_{kS} = \frac{(-1)^g}{\nu^2_{kS}}\, i \cos(\delta - \varphi) \int_0^{R_0} f_{T\nu} \tilde{V}^{(2)}_{k\nu} R^2\, dR,$$
$$U_{kT} = -\frac{(-1)^g}{\nu^2_{kT}}\, i \sin(\delta - \varphi) \int_0^{R_0} f_{T\nu} \tilde{V}^{(3)}_{k\nu} R^2\, dR. \tag{2.31}$$

В частном случае сосредоточенной в точке $R = H$, $\theta = 0$ касательной силы

$$\mathbf{F} = \frac{\delta(R - H)\,\delta(\theta)\,\varphi(t)\,\mathbf{a}_T}{H^2 \sin\theta}$$

$$U_{kS} = (-1)^g\, i \cos(\delta - \varphi)\, \tilde{V}^{(2)}_{k\nu}(H)\, S(p),$$
$$U_{kT} = -(-1)^g\, i \sin(\delta - \varphi)\, \tilde{V}^{(3)}_{k\nu}(H)\, S(p). \tag{2.32}$$

V—VIII. *Другие элементарные источники.* Формулы для остальных элементарных источников, рассмотренных в разд. 1, могут быть получены из формул (1.33)—(1.36) заменой U_{kR} на U_{kS}, U_{kL} на U_{kT}, ξ_{kR} на ν_{kS}/H, ξ_{kT} на ν_{kT}/H, $\tilde{V}^{(1)}_k$ на $\tilde{V}^{(1)}_{k\nu}$, $\tilde{V}^{(2)}_k$ на $(-1)^g \tilde{V}^{(2)}_{k\nu}$, $\tilde{V}^{(3)}_k$ на $(-1)^g \tilde{V}^{(3)}_{k\nu}$.

Асимптотика формул (2.19)—(2.32) $pR_0/b(R_0) \to \infty$. Пусть $pR_0/b(R_0) \to \infty$, а величина $p(R_0 - R)/b(R_0) = pz/b(R_0)$, остается при этом ограниченной. Тогда нетрудно показать, что формулы (2.19)—(2.32) перейдут в соответствующие формулы (1.19)—(1.32),

если учесть, что при $pR_0/b(R_0) \to \infty$ и

$$g = 0, \quad l = 0, \quad H = R_0 - h; \quad R_0\theta \to r;$$

$$U_{kR} \to -U_{kz}; \quad U_{k\theta} \to U_{kr}; \quad \frac{\nu_{kQ}}{R} \approx \frac{\nu_{kQ}}{H} \to \xi_{kQ};$$

$$\tilde{V}^{(i)}_{k\nu}(R_1)\, \tilde{V}^{(i)}_{k\nu}(R_2) \to \tilde{V}^{(i)}_k(z_1)\, \tilde{V}^{(i)}_k(z_2), \tag{2.33}$$

где $z_1 = R_0 - R_1$, $z_2 = R_0 - R_2$, $i = 1, 2, 3$;

$$\tilde{V}^{(1)}_{k\nu}(R_1)\, \tilde{V}^{(2)}_{k\nu}(R_2) \to -\tilde{V}^{(1)}_k(z_1)\, \tilde{V}^{(2)}_k(z_2).$$

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим некоторые свойства полученных формул (1.20), (2.20), существенные для понимания процесса возбуждения и распространения поверхностных волн. Будем считать, что поле сил $\mathbf{F}$, описывающее сейсмический источник, локализовано в некоторой зоне, расположенной в полупространстве вблизи начала координат $z = 0$, $r = 0$, а в шаре — вблизи полюса $R = R_0$, $\theta = 0$. Поместим в точку с координатами z, r, φ (в шаре R, θ, φ) неискажающий приемник, регистрирующий q-ю компоненту смещений этой точки ($q = z, r, \varphi$ в полупространстве, $q = R, \theta, \varphi$ — в шаре). Величина r (или θ) имеет тогда смысл эпицентрального расстояния, φ — азимута с эпицентра на станцию, z (или R) — глубины приемника, отсчитываемой от свободной поверхности (центра шара).

Теоретическая сейсмограмма $u_q(t)$ поверхностной волны, регистрируемая таким приемником, описывается при достаточно больших r (или θ) формулой (1.20) или (2.20). Поверхностные волны Рэлея (индекс волны $Q = R$ или S) будут регистрироваться только при $q = z$, r или R, θ: они поляризованы в вертикальной плоскости (сечении большого круга), проходящей через эпицентр и приемник. Поверхностные волны Лява (индекс волны $Q = L$ или T) будут регистрироваться только при $q = \varphi$: они линейно поляризованы, вектор смещения нормален к плоскости поляризации волн Рэлея.

Каждую сейсмограмму можно рассматривать как суперпозицию бесконечного числа гармоник (в других терминологиях — нормальных волн, обертонов или мод); индекс k ($k = 1, 2, \ldots, \infty$) обозначает номер гармоники. Пусть $u_{kq}(t)$ — вклад k-й гармоники в сейсмограмму q-й компоненты. Тогда

$$u_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kq}(t). \tag{3.1}$$

Будем далее рассматривать не сами сейсмограммы $u_q(t)$ и $u_{kq}(t)$, а их спектры, т. е. трансформации Фурье по времени вида

$\int\limits_0^\infty \Phi(p)\, e^{-ipt}dt$; обозначим их соответственно $\Phi_q(p)$ и $\Phi_{kq}(p)$. Очевидно, что

$$\Phi_q = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{kq}, \tag{3.2}$$

$$u_{kq}(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_0^\infty \Phi_{kq}(p)\, e^{ipt} dp. \tag{3.3}$$

Спектры поверхностных волн. Спектральная плотность Φ_{kq} отлична от нуля только при $p > \overline{p}_{kQ}$, где $\overline{p}_{kQ}$ — граничная частота спектра k-й гармоники Q-й волны. Граничные частоты связаны соотношением

$$\overline{p}_{k+1,Q} > \overline{p}_{kQ} > \overline{p}_{k-1,Q} > \ldots > \overline{p}_{1Q}.$$

В полупространстве $\overline{p}_{1R} = \overline{p}_{1L} = 0$, в шаре $p_{1S} > 0$ и $p_{1T} > 0$. Однако, так как мы не рассматриваем низкочастотную часть спектра возмущений с $p < \overline{p}$, которую нельзя представлять в виде бегущих волн, будет считать, что в поверхностных волнах $\Phi_{kq} = 0$ при $p < \max(\overline{p}, \overline{p}_{kQ})$.

Спектральная плотность Φ_{kq} может быть представлена в виде произведения

$$\Phi_{kq} = \prod_{i=0}^{4} B_{kq}^{(i)}. \tag{3.4}$$

Для сомножителей $B_{kq}^{(i)}$ имеем следующие формулы:

а) в полупространстве (где $Q = R$ при $q = z, r$; $Q = L$ при $q = \varphi$):

$$B_{kq}^{(0)} = B^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}, \tag{3.5}$$

$$B_{kq}^{(1)} = [v_{kQ}(p)\, C_{kQ}(p)\, I_{kQ}(p)]^{-1}, \tag{3.6}$$

$$B_{kq}^{(2)} = \frac{\exp[-ir\xi_{kQ}(p)]}{\sqrt{r\xi_{kQ}(p)}}, \tag{3.7}$$

$$B_{kq}^{(3)} = U_{kQ}(p, \varphi), \tag{3.8}$$

$$B_{kq}^{(4)} = \alpha_q \widetilde{V}_k^{(j_q)}(p), \quad j_z = 1, \quad j_r = 2, \quad j_\varphi = 3, \tag{3.9}$$

$$\alpha_z = 1, \quad \alpha_r = -i, \quad \alpha_\varphi = i;$$

б) в шаре (где $Q = S$ при $q = R, \theta$, $Q = T$ при $q = \varphi$);

$$B_{kq}^{(0)} = B^{(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}, \tag{3.5a}$$

$$B_{kq}^{(1)} = [v_{kQ}(p)\, C_{kQ}(p)\, I_{k\nu Q}]^{-1}, \tag{3.6a}$$

$$B_{kq}^{(2)} = \frac{\exp\left\{-i\left[\left(\nu_{kQ}(p) + \frac{1}{2}\right)\widetilde{\theta} - \frac{\pi}{2} g\right]\right\}}{\sqrt{\nu_{kQ}(p)\sin\theta}}, \tag{3.7a}$$

$$B_{kq}^{(3)} = U_{kQ}(p, \varphi), \tag{3.8a}$$

$$B_{kq}^{(4)} = \alpha_q \widetilde{V}_{k\nu}^{(j_q)}(R), \quad j_R = 1, \quad j_\theta = 2, j_\varphi = 3,$$

$$\alpha_R = 1, \quad \alpha_\theta = i(-1)^{g+1}, \quad \alpha_\varphi = i(-1)^g. \tag{3.9a}$$

Здесь $\widetilde{\theta}$ — полный путь пробега волны после выхода из источника, g — число проходов через эпицентр и антиэпицентр.

Множитель $B_{kq}^{(1)}$ зависит только от свойств среды (распределения скоростей и плотностей по глубине или радиусу) и типа регистрируемой волны.

Множитель $B_{kq}^{(2)}$ описывает эффект распространения волны: числитель его определяет задержку фазы колебания данной частоты, знаменатель — ослабление за счет геометрического расхождения на пути r (или $\widetilde{\theta}$). Дополнительный набег фазы на $\pi g/2$ в шаре происходит за счет g-проходов через эпицентр и антиэпицентр.

Множитель $B_{kq}^{(3)}$ для данной волны зависит от механизма источника, а также от азимутального расположения станции по отношению к источнику. Для осесимметричных источников $B_{kq}^{(3)}$ не зависит от φ.

Множитель $B_{kq}^{(4)}$ зависит от глубины погружения приемника и его направленности (т. е. на какую компоненту смещения он настроен).

Поляризация рэлеевских волн. Отношение спектральных плотностей Φ_{kr}/Φ_{kz} или $\Phi_{k\theta}/\Phi_{kR}$ определяет поляризацию рэлеевской волны. Поскольку $B_{kr}^{(j)} = B_{kz}^{(j)}$ и $B_{kR}^{(j)} = B_{k\theta}^{(j)}$ при $j < 4$, то

$$\frac{\Phi_{kr}}{\Phi_{kz}} = \frac{B_{kr}^{(4)}}{B_{kz}^{(4)}} = -i\left[\frac{\widetilde{V}_k^{(2)}(p, z)}{\widetilde{V}_k^{(1)}(p, z)}\right], \tag{3.10}$$

$$\frac{\Phi_{k\theta}}{\Phi_{kR}} = \frac{B_{k\theta}^{(4)}}{B_{kR}^{(4)}} = i(-1)^{g+1}\left[\frac{\widetilde{V}_{k\nu}^{(2)}(R)}{\widetilde{V}_{k\nu}^{(1)}(R)}\right]. \tag{3.10a}$$

Так как собственные функции $\widetilde{V}^{(i)}_k$, $\widetilde{V}^{(i)}_{k\nu}$ — действительные, волны Рэлея эллиптически поляризованы; направление вращения и соотношение осей эллипса зависят от глубины погружения приемника; кажущееся изменение направления вращения для шара при изменении g связано с фиксированным выбором направления отсчета u_0 (+ при движении от эпицентра).

Принцип взаимности. Для простейших источников типа сосредоточенных сил легко проследить выполнение принципа взаимности — неизменность спектральных плотностей Φ_{kq} при перемене местами источника и приемника с сохранением у источника направленности приемника и наоборот. На самом деле для простой вертикальной силы на глубине согласно (1.26) имеем:

$$B^{(3)}_{kq} = \widetilde{V}^{(1)}_k(p,h)\, S(p),$$

$$\Phi^{\downarrow}_{kz}(h,z) = \left[\prod_{i=0}^{2} B^{(i)}_{kz}\right] S(p)\, \widetilde{V}^{(1)}_k(p,h)\, \widetilde{V}^{(1)}_k(p,z), \qquad (3.11)$$

$$\Phi^{\downarrow}_{kr}(h,z) = \left[\prod_{i=0}^{2} B^{(i)}_{kz}\right] S(p)\, \widetilde{V}^{(1)}_k(p,h)\,(-i)\, \widetilde{V}^{(2)}_k(p,z).$$

Для простой горизонтальной силы на глубине h, направленной на приемник, согласно (2.32) найдем:

$$B^{(3)}_{kq} = i\widetilde{V}^{(2)}_k(p,h)\, S(p),$$

$$\Phi^{\rightarrow}_{kz}(h,z) = \left[\prod_{i=0}^{2} B^{(i)}_{kz}\right] S(p)\, i\widetilde{V}^{(2)}_k(p,h)\, \widetilde{V}^{(1)}_k(p,z), \qquad (3.12)$$

$$\Phi_{kr}{}^{\rightarrow}(h,z) = \left[\prod_{i=0}^{2} B^{(i)}_{kz}\right] S(p)\, \widetilde{V}^{(2)}_k(p,h)\, \widetilde{V}^{(2)}_k(p,z).$$

Для простой горизонтальной силы на глубине h перпендикулярной направлению эпицентр — приемник, согласно (1.32)

$$B^{(3)}_{kq} = -i\widetilde{V}^{(3)}_k(p,h)\, S(p), \qquad (3.13)$$

$$\Phi^{\rightarrow}_{k\varphi}(h,z) = \left[\prod_{i=0}^{2} B^{(i)}_{kq}\right] S(p)\, \widetilde{V}^{(3)}_k(p,h)\widetilde{V}^{(3)}_k(p,z).$$

Отсюда и вытекает существование взаимности:

$$\begin{aligned} \Phi_{kz}{}^{\downarrow}(h,z) &= \Phi_{kz}{}^{\downarrow}(z,h),\\ \Phi^{\rightarrow}_{kr}(h,z) &= \Phi_{kr}{}^{\rightarrow}(z,h),\\ \Phi^{\rightarrow}_{k\varphi}(h,z) &= \Phi_{k\varphi}{}^{\rightarrow}(z,h),\\ \Phi_{kr}{}^{\downarrow}(h,z) &= -\Phi_{kz}{}^{\rightarrow}(z,h),\\ \Phi^{\rightarrow}_{kz}(h,z) &= -\Phi_{kr}{}^{\downarrow}(z,h). \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Аналогичные формулы нетрудно получить для шара.

Литература

1. *А. Г. Аленицын*. Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве волноводного типа.— ПММ, 1967, 31, вып. 2.
2. *З. С. Андрианова, В. И. Кейлис-Борок, А. Л. Левшин, М. Г. Нейгауз*. Поверхностные волны Лява. М., «Наука», 1965.
3. *В. М. Бабич, Г. Н. Бабич Н. А. Фомина*. О расчете волн Лява с использованием асимптотических формул методов ВКБ.— Вычислит. сейсм., 1968, вып. 4.
4. *Е. В. Вилькович, А. Л. Левшин, М. Г. Нейгауз*. Волны Лява в вертикально-неоднородной среде (учет сферичности, вариаций параметров, поглощения).— Вычислит. сейсм., 1965, вып. 2.
5. *В. И. Кейлис-Борок*. Интерференционные поверхностные волны. М., Изд-во АН СССР, 1960.
6. *Б. М. Левитан*. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
7. *А. Ляв*. Математическая теория упругости. М.— Л., ОНТИ, 1935.
8. *Ф. Морс, Г. Фешбах*. Методы теоретической физики, т. II. М., ИЛ, 1960.
9. *М. А. Наймарк*. Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1954.
10. *М. Г. Нейгауз, Г. В. Шкадинская*. Метод расчета поверхностных волн Рэлея в вертикально-неоднородном полупространстве.— Вычислит. сейсм., 1966, вып. 2.
11. *Г. И. Петрашень*. Симметрия вращения и шаровые векторы.— Уч. зап. ЛГУ, 1949, вып. 17.
12. *Т. Б. Яновская*. О дисперсии рэлеевских волн в сферическом слое.— Изд-во АН СССР, серия геофиз., 1958, № 7.
13. *З. А. Янсон*. Об интерференции волн SH в упругом шаровом слое, лежащем на упругом шаре. I, II.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1965, № 1, 5.
14. *Z. Alterman, H. Jarosh, C. Pekeris*. Propagation of Rayleigh waves on the Earth.— Geophys. J., 1961, 4.
15. *Z. Andrianova, V. Keilis-Borok, A. Levshin, M. Neigauz*. Seismic Love waves.— Consult Bureau. N. Y., 1967.
16. *A. Ben-Menachem*. Spectral response of an elastic sphere to dipolar point sources.— Bull. Seismol. Soc. America, 1964, 54, N 5A.
17. *M. Ewing, M. Jardetsky, F. Press*. Elastic waves in layered media. N. Y., Mc. Graw Hill, 1957.
18. *D. Harkrider*. Surface waves in multilayered elastic media.— Bull. Seismol. Soc. America, 1964, 54, N 10.
19. *N. Haskell*. The dispersion of surface waves on multilayered media.— Bull. Seismol. Soc. America, 1953, 43, N 1.
20. *N. Haskell*. The radiation pattern of surface waves from point sources in a multilayered medium.— Bull. Seismol. Soc. America, 1963, 55, N 2.
21. *V. Keilis-Borok, M. Neigauz, G. Shkadinskaya*. Application of the theory of eigenfunctions to the calculations of surface wave velocities.— Revs Geophys., 1965, 3, N 1.
22. *M. Saito*. Excitation of free oscillations and surface waves by a point source in a vertically heterogeneous earth.— J. Geophys. Res., 1967, 72, N 14.
23. *H. Takeuchi, J. Dorman, M. Saito*. Partial derivatives of surface wave phase velocity with respect to physical parameter changes within the Earth.— J. Geophys. Res., 1964, 69, N 16.

Алгоритмы интерпретации сейсмических данных
(Вычислительная сейсмология, вып. 5)

Утверждено к печати
Институтом физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР

Редактор *В. Г. Володина.*
Технический редактор *Л. Н. Золотухина.*
Худож. редактор *Н. Н. Власик.*

Сдано в набор 26/XI 1971 г. Подписано к печати 4/V 1971 г. Формат 60×90¹/₁₆
Бумага № 2. Усл. печ. л. 19,25. Уч.-изд. л. 18,1. Тираж 1150. Т-07451
Тип. зак. 1509. Цена 1 р. 80 к.

Издательство «Наука»
Москва К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
6	Ф-ла (4а)	$-\lambda_\alpha$	λ_α
37	8 сн.	$N^{1/2}$	$N^{1/r}$
62	1 св.	$E_a(r)$	$F_a(r)$
62	19 св.	$\Lambda' - \Lambda/(1-n_a)$	$\Lambda' = \Lambda(1-n_a)$
93	9 сн.	B_c	L_c
93	11 сн.	b_i	l_i
94	16 св.	области	изосейстовой области σ_c
94	17 св.	$\varphi_c \leqslant 3\pi$	$\varphi_c \leqslant \pi$
101	Ф-ла (25)	$(x)\,\sigma^{-3}$	(x)
104	15 сн.	$f(\alpha, \gamma_\delta)\,\vert$	$f(\alpha, \gamma)\,\vert^{\delta}$
109	5 св.	$k_0)^2$	$k_0)^r$
133	Рис. 3, б (верт. ось)	0,4	0,8
152	4 сн.	$\widetilde{\widetilde{V}}\,(p^2) + \widetilde{V}^2\,(\beta)\,\widetilde{V}^{(2)}$	$\widetilde{\widetilde{V}}^{(1)}\,(p^2) + \widetilde{V}^{(2)}\,(\beta)\,\widetilde{\widetilde{V}}^{(2)}$
173	Ф-ла (3.1)	$u_k(l)$	$u_q(l)$
208	5 св.	$u(l)$	$u(x)$

Зак. 1509